

СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ЭВМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

К.А. Черняк,

А.М. Малышенко

Томский политехнический университет

E-mail: kac8@tpu.ru

Введение

Для создания быстродействующих компьютерных программ необходимо знать скорость выполнения реализуемых алгоритмов. При анализе свойств систем важно установить, является ли система устойчивой. Для этих целей на ЭВМ применительно к линейным динамическим системам чаще всего используются программы определения корней ее характеристического уравнения (они должны иметь отрицательные вещественные части) и/или алгебраические критерии устойчивости: критерий Гурвица и критерий Рауса. Эти критерии являются необходимыми и достаточными [1] и используют коэффициенты характеристического полинома исследуемой системы.

Целью данной работы является сравнительная оценка временных затрат с использованием компьютеров на оценку устойчивости линейных и линеаризованных систем выше указанными тремя способами для выявления наиболее быстрого из них.

Критерий Гурвица

Для устойчивости линейной стационарной системы с характеристическим полиномом

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы Гурвица (рис.1) и все ее диагональные миноры были одного знака с коэффициентом при старшем члене характеристического полинома [1].

$$G = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Рис. 1. Матрица Гурвица

Критерий Рауса

Для устойчивости линейной стационарной системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты второго столбца таблицы Рауса (рис.2) были одного знака. Если это не выполняется, то система неустойчива [1].

\vdots	$C_{11} = a_n$	$C_{21} = a_{n-2}$	\dots	\dots
\vdots	$C_{12} = a_{n-1}$	$C_{22} = a_{n-3}$	\dots	\dots
$r_3 = \frac{C_{11}}{C_{12}}$	$C_{13} = C_{21} - r_3 C_{22}$	$C_{23} = C_{31} - r_3 C_{32}$	\dots	\dots
$r_4 = \frac{C_{12}}{C_{13}}$	$C_{14} = C_{22} - r_4 C_{23}$	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Рис. 2. Матрица Рауса

Описание программной реализации

Для выполнения исследования использовался язык программирования Python и библиотека NumPy, в которой реализованы методы линейной алгебры, необходимые для вычисления критерия Гурвица и метод нахождения корней характеристического полинома.

Коэффициенты характеристического полинома при этом генерировались случайным образом в диапазоне $[-100, 100]$ с точностью до трех знаков после запятой.

Для проверки достоверности полученного результата применялось мажоритарное голосование [2], где третьим способом оценки устойчивости системы было вычисление корней характеристического полинома, т.к. этот метод также является необходимым и достаточным [1].

Для использования критериев Гурвица и Рауса формировались соответствующие матрицы, представленные на рис. 1 и рис. 2.

Преимущество критерия Рауса состоит в том, что вывод по нему происходит фактически во процессе заполнения матрицы (рис. 2), требующем применения простых математических операций сложения, деления, умножения.

Общая структурная схема расчетов приведена на рис. 3.



Рис.3. Структурная схема расчета

Для расчетов использовались универсальные математические пакеты Matlab и MathCad.

Приведем пример расчета для системы третьего порядка.

Таблица 1 – Сформированные коэффициенты

a_3	a_2	a_1	a_0
64.182	- 34.249	30.142	- 29.102

Передаточная функция исследуемой системы:

$$W(s) = \frac{1}{64.182s^3 - 34.249s^2 + 30.142s - 29.102}$$

Результаты вычислений:

Таблица 2 – Матрица Гурвица

- 34.249	- 29.102	0
64.182	30.142	0
0	- 34.249	- 29.102

Таблица 3 – Знаки элементов матрицы Гурвица

Знак коэффициента при старшей степени характеристического уравнения	+
Знак определителя первого диагонального минора	-
Знак определителя второго диагонального минора	+
Знак определителя матрицы Гурвица	-

Таблица 4 – Матрица Рауса

-	64.182	30.142
-	- 34.249	- 29.102
- 1.874	- 24.395	0
1.404	- 29.102	0

Таблица 5 – Корни характеристического уравнения системы

- 0.1 + 0.8j	- 0.1 - 0.8j	0.8 + 0.0j
--------------	--------------	------------

Таблица 5 – Устойчивость системы

Критерий Гурвица	Критерий Рауса	Вычисление корней
Неустойчива	Неустойчива	Неустойчива

Таблица 6 – Время оценивания устойчивости

по критерию Гурвица, 10^{-3} с	по критерию Рауса, 10^{-3} с	вычислением корней, 10^{-3} с
1	0.5	0.9

В данном примере время на оценку устойчивости системы существенно отличаются и более предпочтительным в этом плане является критерий Рауса.

Для сопоставительного анализа временных затрат на оценку устойчивости линейных систем указанными выше тремя способами были проведены вычислительные эксперименты с характеристическими полиномами (порядками) систем от 3 до 500. Результаты этих исследований представлены на рис. 4.

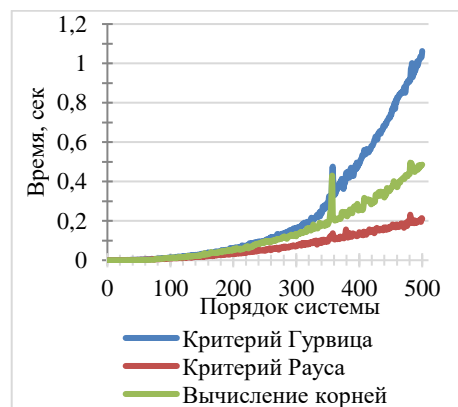


Рис. 4. Время оценивания устойчивости линейных систем различного порядка

Заключение

В результате проведенных вычислительных экспериментов установлено, что наиболее быстро оценивается устойчивость по критерию Рауса. Особенно это заметно в тех случаях, когда исследуемая система является неустойчивой

При увеличении степени характеристического полинома системы от трех до 500 время оценки устойчивости по всем трем описанным способам нарастает по экспоненциальному закону. При этом временные затраты при применении критерия Рауса примерно на 80 процентов меньше, чем при использовании критерия Гурвица и примерно на 50 процентов меньше времени оценивания устойчивости путем вычисления корней характеристического уравнения системы.

Список использованной литературы

1. Ким, Д.П. Теория автоматического управления: Учебник и практикум для академического бакалавриата / Д.П. Ким. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 276 с.
2. Шкляр В.Н. Надёжность систем управления: учебное пособие / В.Н. Шкляр; Томский политехнический университет. - Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. - 126 с.